



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش پژوهان جوان



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان
و دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۰ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

دفترچه سوالات سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی - روز اول

تاریخ: ۱۳۹۷/۲/۶ - ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۲۷۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده:

استان:

کد ملی:

منطقه:

نام پدر:

پایه تحصیلی:

نام مدرسه:

حوزه:

شماره سندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما هم خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آن که برگه های پاسخنامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آن گاه در پاسخنامه پاک نویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هر گونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم (به جز دانش آموزانی که به صورت آزمایشی در این آزمون شرکت کرده اند) انتخاب می شوند.
- بارم هر سوال ۱۵ نمره است.

در صورت لزوم از این 

صفحه به عنوان چرک

نویس استفاده کنید

مطالب این صفحه

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

۱. در دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ (که در آن $BC = AD$ و $AB \parallel CD$) نقطه P محل برخورد قطرهایست و دایره محیطی مثلث APB ، BC را در X قطع می‌کند. خط گذرا از D و موازی با BC ، AX را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید:

$$\angle YDA = 2 \times \angle ACY$$

در صورت لزوم از این

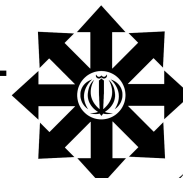
قسمت به عنوان چرک

نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۱

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 1.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

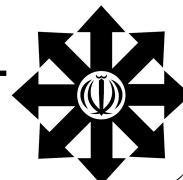
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 1.





مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

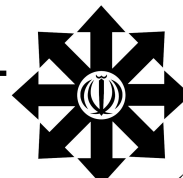
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 1.





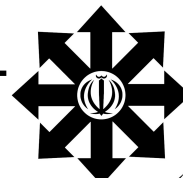
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 1.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 1.



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۲. فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دوجه‌دوی آن‌ها را می‌نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، $\binom{n}{2}$ عدد مثبت به دست آمده را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.

در صورت لزوم از این

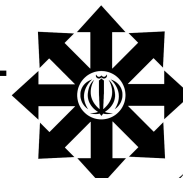
قسمت به عنوان چرک

نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

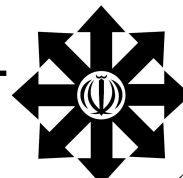
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۲

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



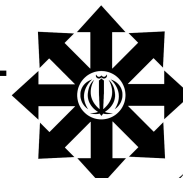
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



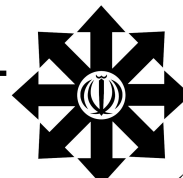
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ماخ

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

۳. فرض کنید $a > k$ دو عدد طبیعی هستند. دو دنبالهٔ اکیداً صعودی $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ و $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت هستند که

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \dots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \dots (a^{s_n} + k)$$

ثابت کنید این دو دنباله برابر هستند، یعنی به ازای هر i داریم $r_i = s_i$.

در صورت لزوم از این

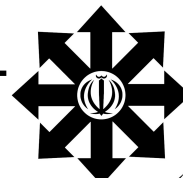
قسمت به عنوان چرک

نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۳

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



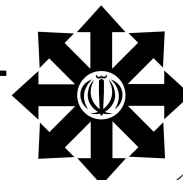
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



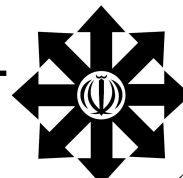
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

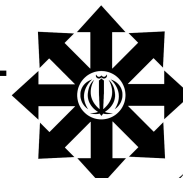
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ماخ

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ماخ

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش پژوهان جوان



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «لام خمینی (ره)»

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۰ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

دفترچه سوالات سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی - روز دوم

تاریخ: ۱۳۹۷/۲/۷ - ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۲۷۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده:

استان:

کد ملی:

منطقه:

نام پدر:

پایه تحصیلی:

نام مدرسه:

حوزه:

شماره سندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما هم خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آن که برگه های پاسخنامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آن گاه در پاسخنامه پاک نویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هر گونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم (به جز دانش آموزانی که به صورت آزمایشی در این آزمون شرکت کرده اند) انتخاب می شوند.
- بارم هر سوال ۱۵ نمره است.

در صورت لزوم از این 

صفحه به عنوان چرک

نویس استفاده کنید

مطالب این صفحه

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

۴. همهٔ توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)f(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$$

در صورت لزوم از این

قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



مرکز ملی پژوهش‌های آموزشی و توسعه
و دانش پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ماخ

پاسخ سوال ۴

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ماخ

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش پروران جوان

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

۵. لامپ‌های سالن اجتماعات اداره‌ای با ۵ کلید روشن و خاموش می‌شوند؛ هر کلید به یک یا چند لامپ متصل است و با تغییر وضعیت هر کلید، وضعیت لامپ‌های متصل به آن تغییر می‌کند. می‌دانیم که مجموعه لامپ‌های متصل به هر دو کلید، متفاوت است. ثابت کنید اگر در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش باشند، ۳ کلید وجود دارد که با تغییر وضعیت همه آنها، دست کم ۲ لامپ روشن می‌شود.

در صورت لزوم از این

قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

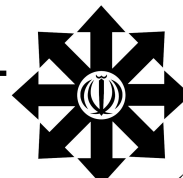


ماخ

پاسخ سوال ۵

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



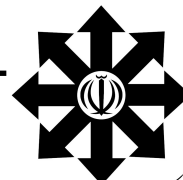
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ماخ

ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ماخ

ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ماخ

ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

۶. دو دایره W_1 و W_2 یکدیگر را در نقاط P و Q قطع می‌کنند. خطی دل‌خواه که از P می‌گذرد W_1 و W_2 را به ترتیب در A و B قطع می‌کند. خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا W_1 را در D و F و W_2 را در C و E قطع کند. به طوری که E و F بین D و C باشند. محل تقاطع BE و AD را X ، محل تقاطع AF و BC را Y و قرینه P نسبت به CD را R می‌نامیم.

الف) ثابت کنید R روی XY قرار دارد.

ب) ثابت کنید PR نیم‌ساز زاویه $\angle XPY$ است.

در صورت لزوم از این

قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

پاسخ سوال ۶

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ماخ

ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش‌پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ماخ

ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.

به نام او

سوال‌های المپیاد ریاضی معمولاً چندین راه‌حل دارند و طبیعی است که در تصحیح برگه‌ها هر راه‌حل درستی پذیرفته می‌شود حتی اگر کمیته علمی المپیاد ریاضی و تیم تصحیح در ابتدا آن راه‌حل را احصا نکرده باشند. در ادامه برای هر یک از سوال‌های آزمون مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی یک یا چند راه‌حل آمده است. لازم است همین‌جا از ۱۳ دانش‌آموز دوره طلای المپیاد ریاضی که اکنون در اردوی آمادگی و در آستانه انتخاب، برای تیم ۶ نفره المپیاد ریاضی ایران هستند تشکر کنم، زیرا این مجموعه با زحمت این عزیزان تهیه شده است.

لازم به ذکر است که ممکن است در این راه‌حل‌ها برخی جزئیات ذکر نشده باشد؛ پس از جمع‌آوری راه‌حل‌های مختلف تیم تصحیح هر سوال، با توجه به همه راه‌حل‌های موجود، بارم‌بندی را انجام خواهند داد. پس از برگزاری آزمون مشخص شد که سوال یک نیاز به فرضی اضافه دارد تا حکم آن درست باشد. کمیته علمی در مورد نمره‌دهی منصفانه این سوال تصمیم‌گیری خواهد کرد.

کمیته علمی المپیاد ریاضی

اردی‌بهشت ۱۳۹۷



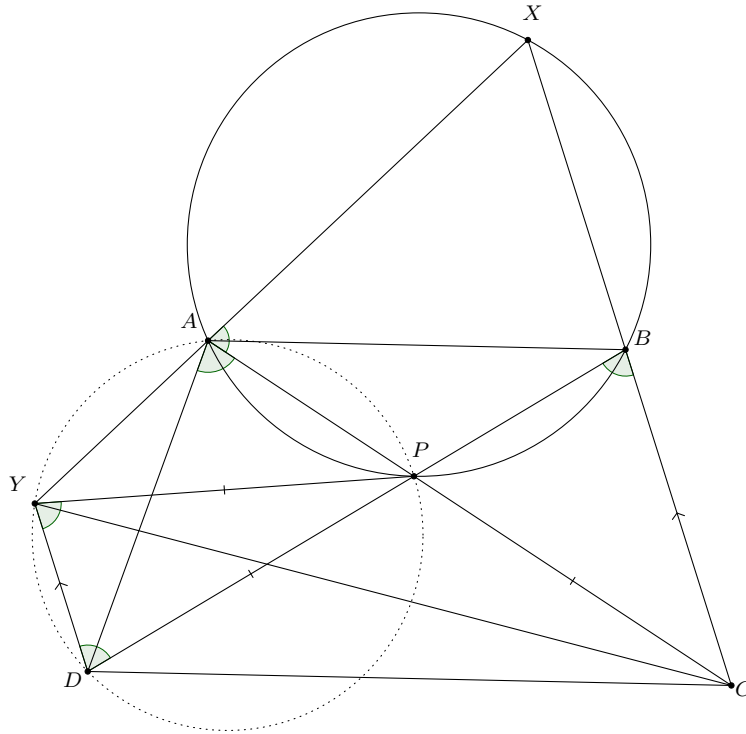
پاسخنامه اولیه آزمون مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

۱. در دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ (که در آن $BC = AD$ و $AB \parallel CD$) نقطه P محل برخورد قطرهایست و دایره محیطی مثلث APB ، BC را در X قطع می کند. خط گذرا از D و موازی با BC ، AX را در Y قطع می کند. ثابت کنید

$$\angle YDA = 2 \times \angle YCA$$

راه حل اول.

سوال را با این فرض اضافه حل می کنیم: نقاط Y و C در دو طرف خط ناشی از امتداد پاره خط AD است.



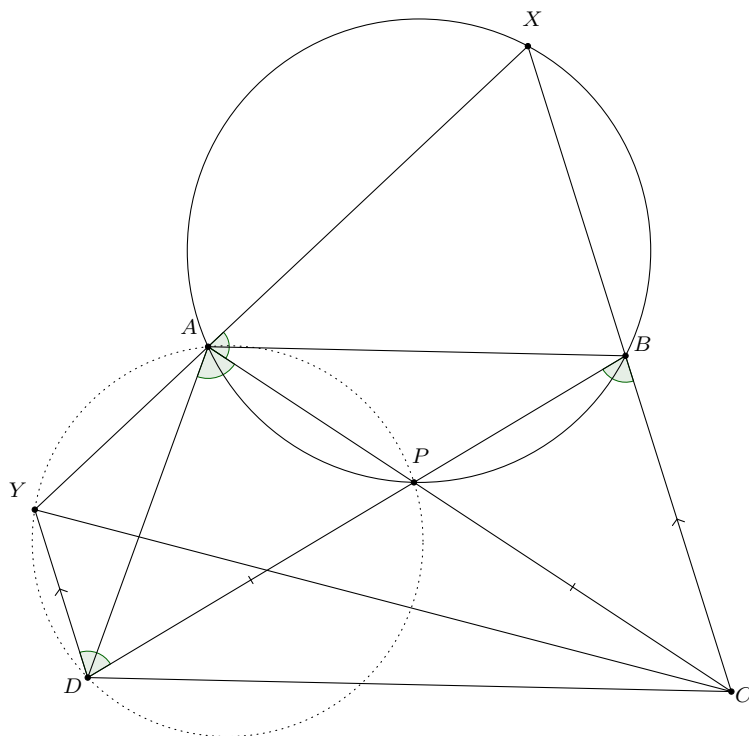
از آن جا که $YD \parallel BC$ به دست می آید $\angle YDP = \angle CBP = \angle XAP$ در نتیجه چهارضلعی $YAPD$ محاطی است هم چنین دقت کنید که $ABCD$ نیز محاطی است. حالا داریم

$$\angle DYP = \angle DAP = \angle DAC = \angle DBC = \angle PDY$$

پس $PY = PD$ از طرف دیگر نیز واضح است که $PD = PC$. از این دو رابطه نتیجه می شود $PY = PC$ و در نهایت به دست می آید

$$2\angle YCA = 2\angle YCP = \angle APY = \angle YDA$$

پس حکم ثابت شد.



مشابه راه حل اول ثابت می شود $YAPD$ محاطی است. داریم

$$\angle DAC = \angle DBC = \angle YDP = \angle XAP = \angle XAC$$

پس C روی نیمساز خارجی $\angle YAD$ قرار دارد. حالا از آن جا که $PC = PD$ به دست می آید

$$\angle ACD = \angle PCD = \frac{1}{2} \angle APD = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AYD$$

پس C دو تا از خواص مرکز دایره محاطی خارجی نظیر راس Y در مثلث DYA را دارد که نتیجه می دهد بر آن نقطه منطبق است. در نهایت بنابر خواص مرکز دایره محاطی خارجی داریم $2\angle YCA = \angle YDA$ که همان حکم سوال است.

پاسخنامه اولیه آزمون مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

۲. فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دوجه‌دوی آن‌ها را می‌نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، $\binom{n}{2}$ عدد مثبت به‌دست آمده را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.



راه‌حل.

فرض کنید اعداد داده شده $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ باشند که n عددی فرد است. اختلاف $a_i - a_j$ که $i > j$ را اگر i و j زوجیت یکسانی داشته باشند در دسته اول و اگر i و j زوجیت متمایزی داشته باشند در دسته دوم قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم ضریب a_i در مجموع اعداد دسته اول و مجموع اعداد دسته دوم با هم برابر است. فرض کنید i زوج باشد (حالت دیگر مشابه است). اختلاف‌های $a_{i+2} - a_i, \dots, a_{n-2} - a_i, a_{n-1} - a_i$ و $a_i - a_2, a_i - a_4, \dots, a_i - a_{i-2}, a_i - a_{i-4}, \dots, a_i - a_2$ در دسته اول شامل a_i هستند پس ضریب a_i در مجموع اعداد دسته اول برابر است با

$$\frac{i-2}{2} - \frac{n-i-1}{2} = \frac{2i-n-1}{2}$$

به طور مشابه اختلاف‌های $a_{i+1} - a_i, \dots, a_{n-2} - a_i, a_n - a_i$ و $a_i - a_1, a_i - a_3, \dots, a_i - a_{i-1}, a_i - a_{i-3}, \dots, a_i - a_1$ در دسته دوم شامل a_i هستند پس ضریب a_i در مجموع اعداد دسته دوم برابر است با

$$\frac{i}{2} - \frac{n-i+1}{2} = \frac{2i-n-1}{2}$$

پس ضریب a_i در مجموع اعداد هر دسته برابر است و حکم ثابت می‌شود.

پاسخنامه اولیه آزمون مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

۳. فرض کنید $a > k$ دو عدد طبیعی هستند و دو دنباله اکیداً صعودی $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ و $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت هستند که

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \dots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \dots (a^{s_n} + k)$$

ثابت کنید این دو دنباله برابر هستند، یعنی به ازای هر i داریم $r_i = s_i$.

راه حل.

با استقرا روی n حکم را نشان می‌دهیم. برای پایه استقرا ($n = 1$) که حکم واضح است. فرض می‌کنیم حکم برای $n - 1$ درست باشد و درستی آن را برای n نشان می‌دهیم. بزرگترین توان عدد اول p در عدد طبیعی x را با $v_p(x)$ نشان می‌دهیم. بنابر فرض $a > k$ عددی اول مانند p وجود دارد که $v_p(a) > v_p(k)$ دو تا از خواص تابع v_p که اثبات آن‌ها نیز واضح است به شرح زیر است:

• اگر x و y دو عدد طبیعی باشند $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$

• اگر x و y دو عدد طبیعی باشند که $v_p(x) < v_p(y)$ آن‌گاه $v_p(x + y) = v_p(x)$

دو طرف تساوی فرض مسئله را باز می‌کنیم، یک k^n از دو طرف خط می‌زنیم و با استفاده از این دو خاصیت v_p دو طرف تساوی را محاسبه می‌کنیم. طرف چپ تساوی برابر است با

$$a^{r_1 + \dots + r_n} + k(a^{r_1 + \dots + r_{n-1}} + \dots + a^{r_2 + \dots + r_n}) + \dots + k^{n-1}(a^{r_1} + \dots + a^{r_n})$$

دقت کنید که عبارت بالا به صورت مجموع n عبارت نوشته شده است پس طبق خاصیت دوم باید کم‌ترین توان p بین این n عبارت را پیدا کنیم. طبق خواص بیان شده و اکیداً صعودی بودن دنباله r_i داریم

$$\begin{aligned} v_p(k^{n-i}(a^{r_1 + \dots + r_i} + \dots + a^{r_{n-i+1} + \dots + r_n})) &= v_p(k^{n-i}) + v_p(a^{r_1 + \dots + r_i} + \dots + a^{r_{n-i+1} + \dots + r_n}) \\ &= (n-i)v_p(k) + v_p(a^{r_1 + \dots + r_i}) \\ &= (n-i)v_p(k) + (r_1 + \dots + r_i)v_p(a) \\ &> (n-i)v_p(k) + ir_1v_p(a) \\ &> (n-1)v_p(k) + r_1v_p(a) \end{aligned}$$

واضح است که رابطه آخر همان $v_p(k^{n-1}(a^{r_1} + \dots + a^{r_n}))$ است پس طبق خاصیت دوم بزرگ‌ترین توان p سمت چپ برابر است با $(n-1)v_p(k) + r_1v_p(a)$ و به طور مشابه بزرگ‌ترین توان p سمت راست برابر است با $(n-1)v_p(k) + s_1v_p(a)$. در نتیجه این دو عبارت باید با هم برابر باشند که به دست می‌آید $r_1 = s_1$. در نهایت با خط زدن عبارت‌های $a^{r_1} + k$ و $a^{s_1} + k$ از دو طرف تساوی حکم طبق فرض استقرا به دست می‌آید.

پاسخنامه اولیه آزمون مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

۴. همه توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)f(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3 \quad (1)$$



راه حل.

در رابطه (۱) قرار می‌دهیم $x = y = 0$ و به دست می‌آید $f(0) = 0$. تعریف می‌کنیم $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ برای هر $x \neq 0$ پس رابطه (۱) تبدیل می‌شود به

$$g(x+y)g(x^2 - xy + y^2) = 1 \quad (2)$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ که $x + y \neq 0$ (دقت کنید که $x^2 - xy + y^2$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود). نشان می‌دهیم برای هر a, b ای که $b \geq \frac{a^2}{4}$ اعداد حقیقی x, y وجود دارند به طوری که $x + y = a$ و $x^2 - xy + y^2 = b$ داریم

$$b = x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy = a^2 - 3xy \Rightarrow xy = \frac{a^2 - b}{3}$$

پس x, y ریشه‌های معادله $z^2 - az + \frac{a^2 - b}{3} = 0$ هستند که طبق فرض $b \geq \frac{a^2}{4}$ دلتای آن نامنفی است که وجود داشتن x, y را نتیجه می‌دهد. پس رابطه (۲) را می‌توان به شکل

$$g(a)g(b) = 1 \quad (3)$$

نوشت که $a \neq 0$ و $b \geq \frac{a^2}{4}$. فرض کنید $0 < a \leq 4$ واضح است که $a \geq \frac{a^2}{4}$ پس در رابطه (۳) می‌توانیم قرار دهیم $b = a$ که نتیجه می‌دهد $g(a) = \pm 1$. باز هم در رابطه (۳) قرار می‌دهیم $a = 4$ پس برای هر $b \geq 4$ داریم $g(b) = \pm 1$ در نتیجه در کل برای هر $a > 0$ داریم $g(a) = \pm 1$. در رابطه (۳) را عددی دلخواه قرار می‌دهیم و از آنجا که b مثبت است نتیجه می‌شود $g(a) = \pm 1$ برای هر $a \neq 0$. حالا فرض کنید r, s حقیقی وجود داشته باشند که $g(r) = 1$ و $g(s) = -1$. طبق رابطه (۳) برای هر $b \geq \frac{r^2}{4}$ داریم $g(b) = 1$ و از طرف دیگر برای هر $b \geq \frac{s^2}{4}$ داریم $g(b) = -1$ که به وضوح این دو رابطه با هم در تناقض اند پس g ثابت ۱ یا ثابت -۱ است که نتیجه می‌دهد $f(x) = x$ یا $f(x) = -x$ که هر دوی این توابع در رابطه (۱) صدق می‌کنند.

پاسخنامه اولیه آزمون مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی



۵. لامپ های سالن اجتماعات اداره ای با ۵ کلید روشن و خاموش می شوند؛ هر کلید به یک یا چند لامپ متصل است و با تغییر وضعیت هر کلید، وضعیت لامپ های متصل به آن تغییر می کند. می دانیم که مجموعه لامپ های متصل به هر دو کلید، متفاوت است. ثابت کنید اگر در ابتدا همه لامپ ها خاموش باشند، ۳ کلید وجود دارد که با تغییر وضعیت همه آن ها، دست کم ۲ لامپ روشن می شود.

راه حل.

کلیدها را با شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ نشان می دهیم. لامپی که بیشترین تعداد کلید به آن متصل است را A می نامیم. مسئله را به پنج حالت تقسیم می کنیم:

حالت اول. ۵ کلید به لامپ A متصل باشد.

یک لامپ دیگر مانند B را در نظر می گیریم. اگر حداقل سه کلید به B وصل باشند همین سه کلید را می زنیم. در غیر این صورت ۲ کلید از کلیدهایی که B وصل نیستند و ۱ کلید که B وصل است را می زنیم.

حالت دوم. ۴ کلید به لامپ A متصل باشد.

از آن جا که مجموعه لامپ های هیچ دو کلیدی یکسان نیست لامپی مانند B وجود دارد که کلیدهایش با کلیدهای A اشتراک داشته باشد. اگر حداقل ۳ اشتراک داشته باشد همین ۳ کلید را می زنیم. در غیر این صورت ۱ کلید مشترک بین A و B و ۲ کلید از ۴ کلیدی که به A وصل اند ولی به B وصل نیستند را می زنیم.

حالت سوم. ۳ کلید به لامپ A متصل باشد.

فرض کنید A به کلیدهای ۱ و ۲ متصل نباشد. از آن جا که مجموعه لامپ های این دو کلید یکسان نیست لامپی مانند B وجود دارد که فقط به یکی از این دو کلید متصل است. همچنین این لامپ به حداکثر ۳ کلید متصل است پس به حداقل یکی از کلیدهای ۳ و ۴ و ۵ مانند ۳ وصل نیست در نتیجه کلیدهای ۱ و ۲ و ۳ را می زنیم.

حالت چهارم. ۲ کلید به لامپ A متصل باشد.

کاملاً مشابه حالت قبل عمل می کنیم. فرض کنید A به کلیدهای ۱ و ۲ و ۳ متصل نباشد پس لامپی مانند B وجود دارد که به کلید ۱ وصل باشد ولی به کلید ۲ وصل نباشد. همچنین B حداقل به یکی از کلیدهای ۴ و ۵ مانند ۴ نیز وصل نیست پس کلیدهای ۱ و ۲ و ۴ را می زنیم.

حالت پنجم. ۱ کلید به لامپ A متصل باشد.

واضح است که همه لامپ ها به دقیقاً ۱ کلید متصل اند و لامپی مانند B وجود دارد که به کلیدی دیگر وصل باشد پس ۲ کلید متصل به A و B و ۱ کلید دل خواه دیگر را می زنیم.

پس در همه حالات ممکن حکم مسئله برقرار است.

پاسخنامه اولیه آزمون مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

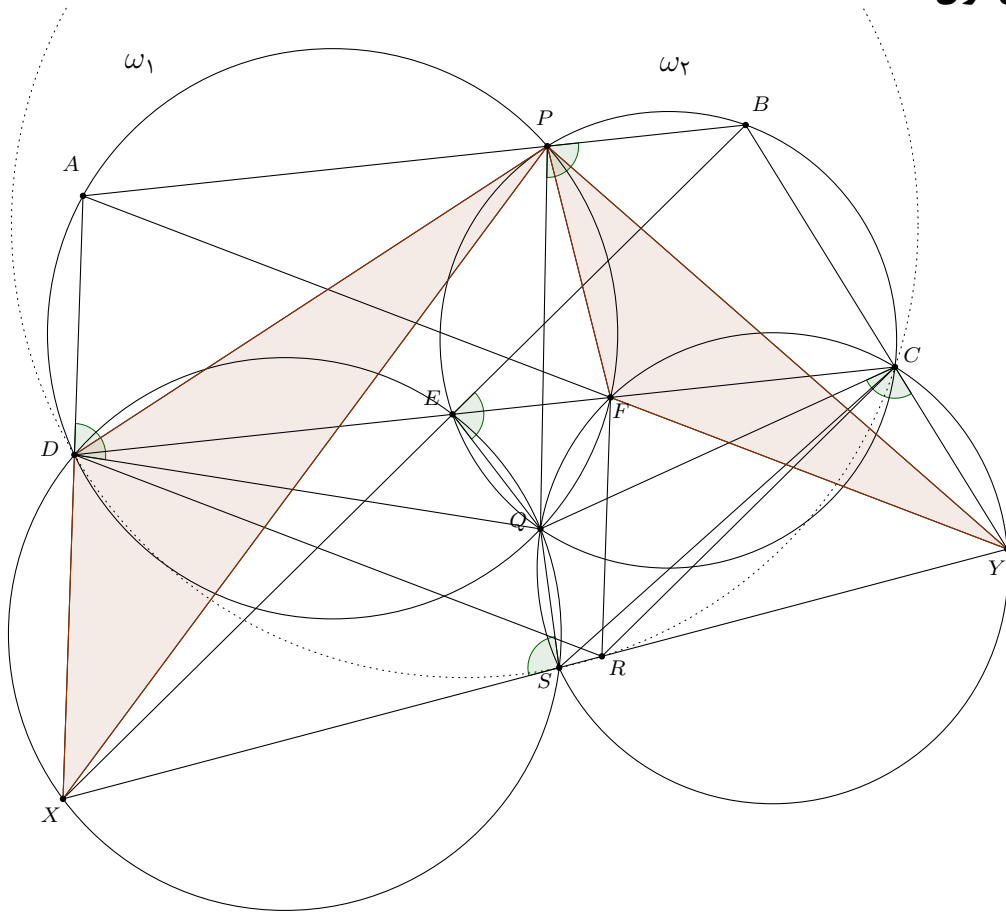


۶. دو دایره ω_1 و ω_2 یکدیگر را در نقاط P و Q قطع می‌کنند. خطی دل‌خواه که از P می‌گذرد و ω_1 و ω_2 را به ترتیب در A و B قطع می‌کند. خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا ω_1 را در D و F و ω_2 را در C و E قطع کند به طوری که E و F بین D و C باشند. محل تقاطع BE و AD را X ، محل تقاطع AF و BC را Y و قرینه P نسبت به CD را R می‌نامیم.

الف) ثابت کنید R روی XY قرار دارد.

ب) ثابت کنید PR نیم‌ساز زاویه $\angle XPY$ است.

راه حل اول.



الف) دقت کنید که

$$\angle QEB = \angle QPB = \angle QDA \implies \angle QEX = \angle QDX$$

پس چهارضلعی $XDEQ$ محاطی است و به طور مشابه چهارضلعی $YCFQ$ نیز محاطی است. محل برخورد دوم دایره محیطی این دو چهارضلعی را S می‌نامیم. واضح است که $\angle QSX = \angle QEB = \angle QCY$ پس X, S, Y هم‌خطاند. محل برخورد دوم دایره محیطی مثلث DSC با XY را R' می‌نامیم. داریم

$$\angle R'DC = \angle R'SC = \angle YSC = \angle YFC = \angle FAP = \angle FDP = \angle CDP$$

و به طور مشابه به دست می‌آید $\angle R'CD = \angle DCP$ پس R' قرینه P نسبت به CD است و $R \equiv R'$ در

پاسخنامه اولیه آزمون مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

نتیجه حکم این قسمت ثابت شد.

ب) واضح است که $FR = FP = AD$ و $RD = PD = AF$ پس $AFRD$ متوازی الاضلاع است و $RD \parallel AF$ و $RF \parallel AD$. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{RY}{RX} = \frac{AD}{DX} = \frac{PF}{DX}$$

همچنین طبق قضیه نیمساز حکم معادل است با $\frac{RY}{RX} = \frac{PY}{PX}$ پس کفایت نشان دهیم $\frac{PY}{PX} = \frac{PF}{DX}$. ثابت می‌کنیم $\triangle PDX \sim \triangle YFP$ و از این حکم به دست می‌آید. دقت کنید که $\angle ADP = \angle AFP$ پس $\angle PDX = \angle PFY$ در نتیجه کافی است نشان دهیم

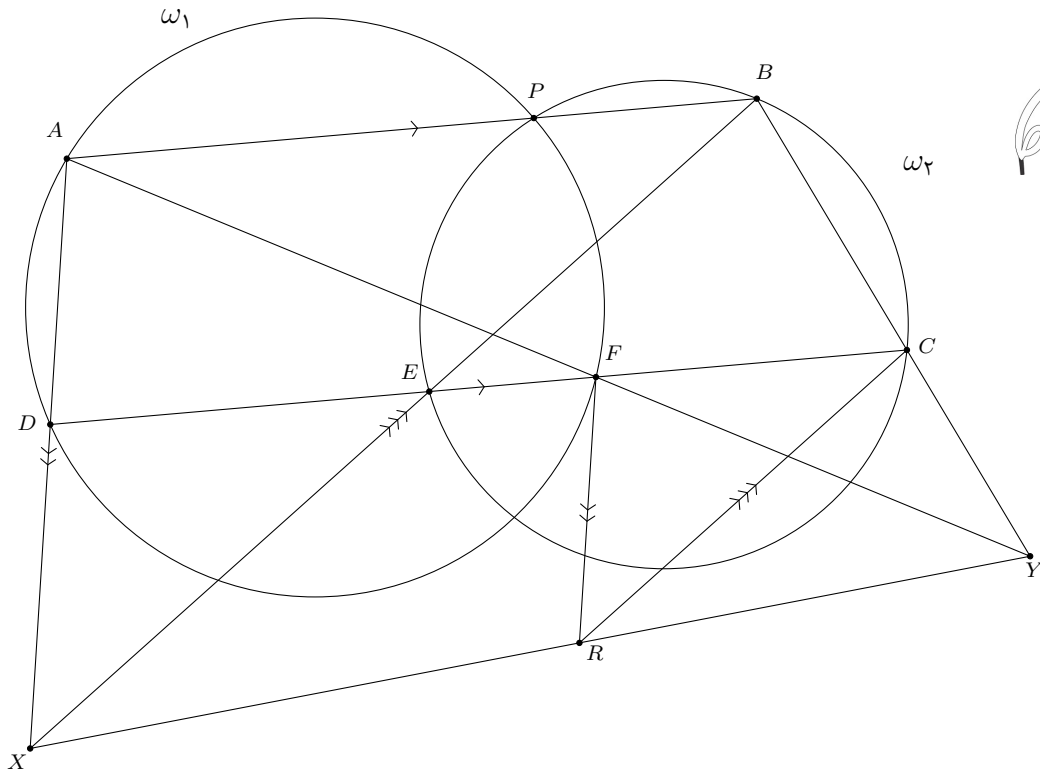
$$\frac{PD}{DX} = \frac{FY}{FP} \iff \frac{AF}{FY} = \frac{DX}{AD}$$

از آنجا که $RD \parallel AF$ و $RF \parallel AD$ دو طرف رابطه آخر با $\frac{RX}{RY}$ برابر است و حکم این قسمت نیز ثابت می‌شود.



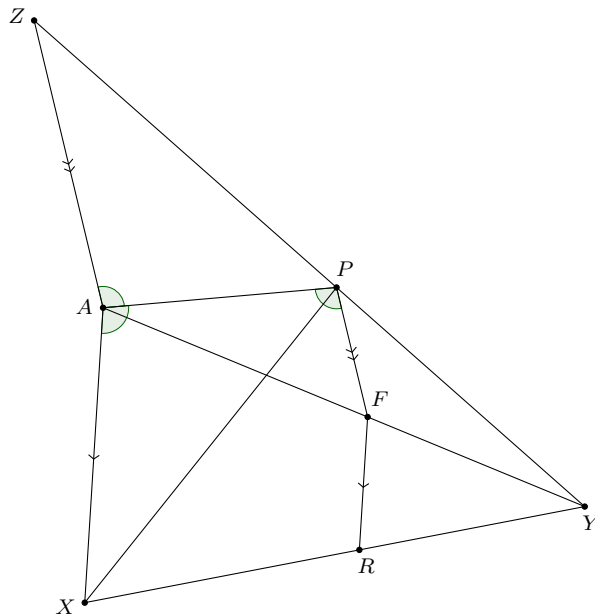
راه حل دوم.

(الف)



دقت کنید که چهارضلعی‌های $ADFP$ و $PBCE$ دوزنقه متساوی‌الساقین هستند در نتیجه $\angle RFD = \angle RFE = \angle PBE = \angle PCF = \angle FCR$ پس $RF \parallel AX$ و $\angle PFD = \angle ADF$ پس $RC \parallel BX$. حالا دو مثلث XAB و RFC را در نظر بگیرید. اضلاع این دو مثلث دویه دو با هم موازی‌اند پس خطوطی که رئوس متناظر را به هم متصل می‌کنند در یک نقطه هم‌مرس‌اند (به این مثلث‌ها اصطلاحاً مثلث‌های متجانس می‌گوییم و این حکم نیز با قضیه تالس به راحتی اثبات می‌شود) یعنی خطوط BC و AF و XR هم‌مرس‌اند که همان حکم سوال است.

(ب)



پاسخنامه اولیه آزمون مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

از نقطه A خطی موازی با PF رسم می‌کنیم تا PY را در Z قطع کند. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{PF}{AZ} = \frac{YF}{YA} = \frac{FR}{AX}$$



پس از آن‌جا که $PF = FR$ نتیجه می‌شود $AX = AZ$. از طرف دیگر دقت کنید که $\angle ZAP = \angle FPA = \angle XAP$ پس دو مثلث ZAP و XAP به حالت دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشت می‌شوند که نتیجه می‌دهد $ZP = PX$. در نهایت طبق قضیه تالس به دست می‌آید

$$\frac{PY}{PX} = \frac{PY}{PZ} = \frac{FY}{FA} = \frac{RY}{RX}$$

و حکم طبق قضیه نیم‌ساز نتیجه می‌شود.